



**UNIVERSITY OF NORTH BENGAL**  
B.Sc. Programme 3rd Semester Examination, 2020

**DSC3-MATHEMATICS**

**REAL ANALYSIS**

Full Marks: 60

**ASSIGNMENT**

*The figures in the margin indicate full marks.  
All symbols are of usual significance.*

**GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক**

1. Answer **all** questions: 2×6 = 12  
 সকল প্রশ্নের উত্তর দাওঃ  
 सबै प्रश्नका उत्तर दिनुहोस् :
- (a) Examine whether  $\log_{10} 5$  represents a rational number or not. 2  
 $\log_{10} 5$  সংখ্যাটি মূলদ কিনা পরীক্ষা কর।  
 वर्णन गर्नुहोस् कि  $\log_{10} 5$  ले एक तर्कसंगत (rational) संख्या प्रतिनिधित्व गर्दछ कि छैन।
- (b) Find  $\sup A$  and  $\inf A$ , where 2  

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$
  
 $A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ -এর  $\sup A$  এবং  $\inf A$  নির্ণয় কর।  
 Sup  $A$  र  $\inf A$  खोज्नुहोस्, जहाँ,  $A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
- (c) Give an example of a sequence  $\{x_n\}$  which is not convergent but the sequence  $\{|x_n|\}$  is convergent. 2  
 এমন একটি অনুক্রম  $\{x_n\}$  এর উদাহরণ দাও যেখানে  $\{x_n\}$  অনুক্রমটি নিজে অভিসারী নয় কিন্তু  $\{|x_n|\}$  অনুক্রমটি অভিসারী হবে।  
 एउटा अनुक्रम  $\{x_n\}$  को उदाहरण दिनुहोस् जुन कन्भर्जन्ट होइन तर अनुक्रम  $\{|x_n|\}$  कन्भर्जन्ट हो।
- (d) Find  $\overline{\lim} x_n$  and  $\underline{\lim} x_n$ , where  $x_n = \frac{n}{4^2} - \left[ \frac{n}{4^2} \right]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . 2  
 $\overline{\lim} x_n$  এবং  $\underline{\lim} x_n$  নির্ণয় কর যেখানে  $x_n = \frac{n}{4^2} - \left[ \frac{n}{4^2} \right]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
 $\overline{\lim} x_n$  र  $\underline{\lim} x_n$  खोज्नुहोस्, जहाँ  $x_n = \frac{n}{4^2} - \left[ \frac{n}{4^2} \right]$ ,  $n \in \mathbb{N}$

(e) Let  $S = (0, 1]$  and  $T = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ . Is  $S - T$  an open set? 2

ধর  $S = (0, 1]$  এবং  $T = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ , তাহলে  $S - T$  সেটটি কি open সেট হবে ?

$S = (0, 1]$  র  $T = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$  হুন দিনুহোস্, কে  $S - T$  open সেট হো ?

(f) Find the limit points of set of rational numbers. 2

মূলদ সংখ্যার সেটটির সীমা বিন্দু (limit point) গুলি নির্ণয় কর।

तर्कसंगत संख्याको सेटको सीमा बिन्दु खोज्नुहोस्।

### GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

**Answer all questions**

5×4 = 20

সকল প্রশ্নের উত্তর দাও

সব্বৈ প্রশ্নকা उत्तर दिनुहोस्

2. Prove that the set of real numbers  $\mathbb{R}$  is an uncountable set. 5

প্রমাণ কর বাস্তব সংখ্যার সেট  $\mathbb{R}$  টি একটি অগণিত সেট (uncountable set)।

प्रमाणित गर्नुहोस् कि वास्तविक संख्याहरूको (real numbers)  $\mathbb{R}$  सेट अनगिनत सेट हो।

3. Prove that the sequence  $\{x_n\}$  defined by  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$  for  $n \geq 1$ , converges to 2. 5

প্রমাণ কর অনুক্রম  $\{x_n\}$  টি 2 এ অভিসারী হবে যেখানে  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ ,  $n \geq 1$ .

प्रमाणित गर्नुहोस् कि अनुक्रम  $\{x_n\}$  को  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$  द्वारा  $n \geq 1$  को लागि परिभाषिता गरिएको छ, जो र सम्म रूपान्तरण (converges) हुन्छ।

4. Show that  $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r < a\} = a$  for each  $a \in \mathbb{R}$ . 5

প্রতিটি  $a \in \mathbb{R}$  এর জন্য দেখাও যে

$$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r < a\} = a$$

प्रत्येक  $a \in \mathbb{R}$  का लागि  $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r < a\} = a$  हो भनै देखाउनुहोस्।

5. Find the derived set of 5

$$S = \left\{ \frac{2}{p} + \frac{3}{q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

and check if that set is open.

$S = \left\{ \frac{2}{p} + \frac{3}{q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}$ -এর derived সেটটি নির্ণয় কর এবং পরীক্ষা করে দেখ যে সেটটি open কিনা।

$S = \left\{ \frac{2}{p} + \frac{3}{q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}$  को derived सेट खोज्नुहोस् र सेट open छ कि हैन जाँच गर्नुहोस्।

## GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

Answer all questions

7×4 = 28

সকল প্রশ্নের উত্তর দাও

সব্বৈ প্রশ্নকা উত্তর দিনুহোস্

6. (a) Prove that the set of natural numbers  $\mathbb{N}$  is unbounded above. 3+4

প্রমাণ কর স্বাভাবিক সংখ্যার সেট  $\mathbb{N}$  টি unbounded above হবে।

প্রমাণিত গর্নুহোস্ কি natural সংখ্যাहरूको सेट माथि unbounded छ।

- (b) Prove that for any  $\varepsilon > 0$ , there exists a natural number  $n$  such that  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

যে-কোন  $\varepsilon > 0$  এর জন্য প্রমাণ কর যে অন্ততপক্ষে একটি স্বাভাবিক সংখ্যা  $n$  থাকবে যাতে  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

প্রমাণিত গর্নুহোস্ जुन कुनै पनि  $\varepsilon > 0$  को लागि, त्यहाँ प्राकृतिक संख्या (natural number)  $n$

अवस्थित छ जुन  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$  छ।

7. (a) Prove that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n!)^{1/n} = \frac{1}{e}$ . 3+4

প্রমাণ কর  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n!)^{1/n} = \frac{1}{e}$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n!)^{1/n} = \frac{1}{e}$ , প্রমাণিত গর্নুহোস্।

- (b) Let  $S$  be a non-empty subset of  $\mathbb{R}$  having a limit point  $\xi$ . Show that there exists a sequence  $\{x_n\}$  of distinct elements of  $S$  such that  $\lim x_n = \xi$ .

ধর  $S$  একটি  $\mathbb{R}$  সেটের শূন্য সেট নয় এমন উপসেট যার মধ্যে একটি  $\xi$  সীমা বিন্দু (limit point) আছে। দেখাও যে  $S$  সেটের আলাদা আলাদা উপাদান (distinct elements) দ্বারা গঠিত অন্ততপক্ষে একটি অনুক্রম  $\{x_n\}$  পাওয়া যাবে যেখানে  $\lim x_n = \xi$ .

$S$  লাই এক সীমিত পোইন্ট  $\xi$  भएको  $\mathbb{R}$  को non-empty subset हुन दिनुहोस्। देखाउनुहोस् कि त्यहाँ  $S$  को फरक तत्वहरूको (distinct elements) अनुक्रम  $\{x_n\}$  अवस्थित छ र  $\lim x_n = \xi$  यसतो छ।

8. (a) If  $B$  is a countable subset of an uncountable set  $A$ , then show that  $A - B$  is uncountable. 3+4

যদি uncountable সেট  $A$  এর countable উপসেট  $B$  হলে দেখাও যে  $A - B$  সেটটি uncountable হবে।

যদি  $B$  এক অনগিনত (uncountable) সেট  $A$  का गणनायोग्य (countable) सेट हो भनै, तब देखाउनुहोस् कि  $A - B$  अनगिनत हो।

- (b) If  $A_1, A_2, A_3, \dots$  be any sequence of countable sets, prove that  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  is also countable.

যদি  $A_1, A_2, A_3, \dots$  একটি countable সেটের একটি অনুক্রম হয় তাহলে  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  একটি countable সেট হবে।

যদি  $A_1, A_2, A_3, \dots$  গণনা যোগ্য সেটকো कुनै अनुक्रम हो भनै, प्रमाणित गर्नुहोस् कि  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  पनि गणना योग्य छ।

9. (a) Find  $\lim \sup$  and  $\lim \inf$  of  $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ .

3+4

$\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$  এর  $\lim \sup$  and  $\lim \inf$  নির্ণয় কর।

$\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$  को  $\lim \sup$  र  $\lim \inf$  खोज्नुहोस्।

(b) Find the derived set of

$$S = \left\{ \frac{(-1)^m}{m} + \frac{1}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$S = \left\{ \frac{(-1)^m}{m} + \frac{1}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}$ -এর derived set টি নির্ণয় কর।

$S = \left\{ \frac{(-1)^m}{m} + \frac{1}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}$  को derived सेट खोज्नुहोस्।

—x—